مسائل عن التحليل الشعاعي

د. منير الترك

رياضيات 3

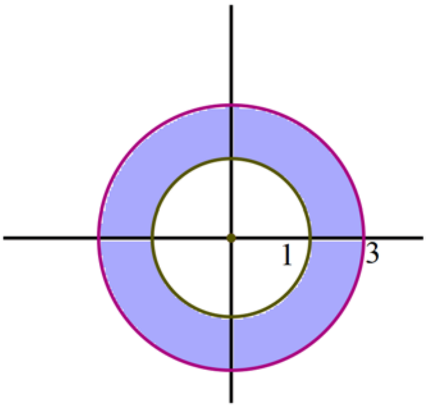
مسألة:

حقق نظرية غرين في المستوي للمعادلة: $\oint_{\Gamma}(2x - y^3)d(x) - xyd(y)$

حيث ان هي المنطقة المحاطة بالدائرتين: $x^2 + y^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 1$

الحل:



إن $0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \quad 1 \le r \le 3$

$$\iint \frac{df(y)}{d(x)} - \frac{df(x)}{d(y)}\, d(x)d(y)$$

$$\int_0^{2\pi} [\int_1^3 [\frac{1}{3} rSin(\theta) - \frac{3}{4} r^2 Sin^2(\theta)]rd(r)]d(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^3}{3} Sin(\theta) + \frac{3}{4} r^4 Sin^2(\theta)\right]_1^3 d(\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} -9Sin(\theta) + \frac{243}{4} Sin^2(\theta) + Sin(\theta) - 3Sin^2(\theta)d(\theta)$$

$$= \left[\frac{26}{3} COS(\theta) + 30(\theta - \frac{Sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{26}{3} + \frac{2\pi \times 60}{2} - \frac{26}{3} + 0 = 60\pi$$

أما الشق الخطي لغرين

على الدائرة الكبيرة:

$$x = rCOS(\theta) \rightarrow d(x) = -rSin(\theta)d(\theta)$$

$$y = rSin(\theta) \rightarrow d(y) = rCOS(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} (2 \times 3COS(\theta) - 27Sin^3(\theta)\big(-3Sin(\theta)\big) - 9COS(\theta)Sin(\theta)(3COS(\theta))d(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} -18Sin(\theta)COS(\theta) + 81Sin^4(\theta) - 27COS^2(\theta)Sin(\theta)d(\theta)$$

$$\left[-\frac{18Sin^2(\theta)}{2} + ---- + \frac{27}{3}COS^3(\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{27}{3} + 81 \times 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{4 \times 2} - \frac{27}{3} = \frac{243\pi}{4}$$

على الدائرة الصغيرة:

$$\int_0^{2\pi} (2 \times 1COS(\theta) - 1Sin^3(\theta)\big(-1Sin(\theta)\big) - 1COS(\theta)Sin(\theta)(1COS(\theta))d(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} -2Sin(\theta)COS(\theta) + Sin^4(\theta) - COS^2(\theta)Sin(\theta)d(\theta)$$

$$= \left[-\frac{2Sin^2(\theta)}{2} + -- + \frac{1}{3}COS^3(\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} + 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{4 \times 2} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

$-\frac{3\pi}{4} =$ الجواب سالب لأن جهة دوران الدائرة الصغيرة مع عقارب الساعة

نجمع الناتجين فيكون $I = -\frac{3\pi}{4} + \frac{243\pi}{4} = 60\pi$

مسألة امتحانية:

اكتب نص نظرية غرين في التفرق و امن ثم احسب تدفق الحقل الشعاعي:

$$\vec{F} = 3xy^2\vec{i} + 3yx^2\vec{j} + z^3\vec{k}$$

عبر السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

الحل:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq r \leq 2COS(\theta)$$

الجواب: $\frac{32}{5}\pi$

احسب قيمة التراكيب التالية:

برهن أن $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ **هو شعاع لولبي**

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left(\vec{\nabla}.\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + \frac{1}{r^3}(\vec{\nabla}.\vec{r}) = -\frac{3}{r^4}\hat{r}\vec{r} + \frac{1}{r^3}3 = \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

2) برهن أن $r.\vec{r}$ **كموني**

$$\vec{\nabla}\Lambda(r.\vec{r}) = (\vec{\nabla}.r)\Lambda\vec{r} + r.(\vec{\nabla}\Lambda\vec{r}) = \hat{r}\Lambda\vec{r} + r.0 = 0 + 0 = 0$$

3) ليكن لدينا التابع الشعاعي:

$$\vec{F} = (\vec{r}.\hat{\imath})\vec{r}$$

حيث أن $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

والمطلوب:

احسب $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F})$ **و** $\vec{\nabla}\Lambda(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F})$

الحل:

$$\vec{F} = (\vec{r}\,\vec{\imath})\vec{r} = x\vec{r}$$

$$\vec{F} = x^2\,\vec{\imath} + yx\,\vec{\jmath} + zx\,\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{d}{d(x)} & \frac{d}{d(y)} & \frac{d}{d(z)} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0-0)\hat{\imath} - (z-0)\hat{\jmath} + (y-0)\hat{k} = -z\hat{\jmath} + y\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}) = \vec{\nabla}(-z\hat{\jmath} + y\hat{k}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{d}{d(x)} & \frac{d}{d(y)} & \frac{d}{d(z)} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (1+1)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} = 2\hat{\imath}$$

مسألة هامة جدا :

برهن ان $\vec{F} = r^3\vec{r}$ هو تابع شعاعي كموني ثم أوجد كمونه العددي ثم أوجد $\nabla^2.u$

الحل:

لكي يكون $\vec{F}$ محافظا (كمونيا) يجب أن يكون:

$$\vec{\nabla}\wedge(r^3.\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge(r^3.\vec{r}) = (\vec{\nabla}.r^3)\wedge\vec{r} + r^3(\vec{\nabla}\wedge\vec{r}) = (3r^2\hat{r})\wedge\vec{r} + r^3.0 = 3r^2(\hat{r}\wedge\vec{r}) + 0 = 3r^2(0) = 0$$

نعلم أنه إذا كان $\vec{F}$ كموني فإنه يكتب على تدرج لتابع عددي **u** أي $\vec{F} = \vec{\nabla}.u$

ونعلم أن علاقة تدرج التفاضل التام هي:

$$\vec{\nabla}.u = \frac{du}{d(r)}\hat{r} = \vec{F} = r^3\vec{r}$$

ومنه وبالمطابقة نجد:

$$\frac{du}{d(r)}\hat{r} = rr^3\vec{r} \rightarrow \frac{du}{d(r)} = r^4 \rightarrow du = r^4 d(r) \rightarrow u = \frac{r^5}{5} + c$$

$$\nabla^2.u = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.u) = \vec{\nabla}(r^3\vec{r}) = (\vec{\nabla}.r^3)\vec{r} + r^3(\vec{\nabla}.\vec{r}) = 3r^2\hat{r}\vec{r} + 3r^3 = 3r^3 + 3r^3 = 6r^3$$

مسألة (2) هامة:

إذا كان $u = \left(r + \frac{1}{r^2}\right)COS(\theta) + Sin(\varphi)$

احسب كلا مما يأتي: $\vec{\nabla}.u$, $\nabla^2.u$ $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}.u)$

الحل:

$$\vec{\nabla}.u = \frac{du}{d(r)}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{du}{d(\theta)}\hat{\theta} + \frac{1}{rSin(\theta)}\frac{du}{d(\varphi)}\hat{\varphi}$$

$$\frac{du}{d(r)} = \left(1 - \frac{2}{r^3}\right) COS(\theta)$$

$$\frac{du}{d(\theta)} = -\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin(\theta)$$

$$\frac{du}{d(\varphi)} = COS(\varphi)$$

$$\vec{\nabla}.u = \left(1 - \frac{2}{r^3}\right) COS(\theta)\hat{r} - \frac{1}{r}\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin(\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{rSin(\theta)} COS(\varphi)\hat{\varphi}$$

$$\nabla^2.u = \frac{1}{r^2Sin(\theta)}\left[Sin(\theta)\frac{d}{d(r)}\left(r^2\frac{du}{d(r)}\right) + \frac{d}{d(\theta)}\left(Sin(\theta)\frac{du}{d(\theta)}\right) + \frac{1}{Sin(\theta)}\frac{d2u}{d(\varphi^2)}\right]$$

$$r^2\frac{du}{d(r)} = r^2\left(1 - \frac{2}{r^3}\right) COS(\theta)$$

$$Sin(\theta)\frac{du}{d(\theta)} = \frac{d}{d(\theta)}\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin^2(\theta) = -2\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin(\theta)COS(\theta)$$

$$\frac{d2u}{d(\varphi^2)} = -Sin(\varphi)$$

ومنه نجد:

$$\nabla^2.u = \frac{1}{r^2Sin(\theta)}\left[2\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin(\theta)COS(\theta) - 2\left(r + \frac{1}{r^2}\right) Sin(\theta)COS(\theta) - \frac{Sin(\varphi)}{Sin(\varphi)}\right]$$

$$\nabla^2.u = -\frac{Sin(\varphi)}{r^2Sin(\theta)}$$

ونعلم أن $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}.u)$ يساوي الصفر حيث ان دوران التدرج معدوم